ENS LYON (M') M1

On notera $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ une base de $\mathbb{A}$. Montrer que les éléments de la forme exp(sU).exp(tV) où s, t $\in \mathbb{R}$ constituent un sous-groupe de GL(2,$\mathbb{R}$). Ce groupe est-il abélien ? Construire un isomorphisme entre ce groupe et le groupe G défini ci-dessus.

4°. On notera $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que si deux matrices sont dans $\mathbb{H}$, leur commutateur est également dans $\mathbb{H}$. Identifier le sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ engendré par les matrices qui s'écrivent sous forme de commutateur.

Montrer que les matrices de la forme exp(sP).exp(tQ).exp(uH), où s, t et u $\in \mathbb{R}$, constituent un sous-groupe de GL(3,$\mathbb{R}$), noté $\mathcal{H}$. Démontrer que pour tout h $\in \mathcal{H}$, on a :

h.exp(tH) = exp(tH).h

5°.* Dans cette question, nous considérons les séries de la forme $f(X) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p$ avec $a_p \in k$ et $X \in M_n(k)$. On dit qu'une telle série vérifie la propriété (C_T) si pour $\|X\| < T$ la série de terme général $|a_p| \, \|X\|^p$ est convergente. On définit le produit de deux séries de ce type : si $f(X) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p X^p$ et $g(X) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p X^p$ alors $(fg)(X) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=p} a_i b_j \right) X^p$. On a alors l'égalité suivante dans $M_n(k)$: f(X).g(X) = (fg)(X).

Montrer que, si f et g vérifient (C_T), alors fg vérifie (C_T).

Si la série g(X) vérifie g(0) = 0 et si f vérifie (C_T), on définit la série composée par $f(g(X)) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p g(X)^p$ pour les matrices X telles que $\|g(X)\| < T$.

5°.a) Soit $X \in M_n(k)$ vérifiant $\|X\| < 1$. Montrer que la série de terme général $(-1)^{p-1} \frac{X^p}{p}$ vérifie la propriété (C_T). On notera $\mathrm{Log}(I + X) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{X^p}{p}$. Montrer que $\exp(\mathrm{Log}(I + X)) = I + X$.

Montrer que pour toute matrice X et Y, on peut trouver T > 0 tel que la série $P_t(X,Y) = \mathrm{Log}(\exp(tX)\exp(tY))$ soit bien définie pour $|t| < T$. Montrer que $P_t(X,Y) = t(X + Y) + t\,\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t)$ étant une matrice telle que $\|\varepsilon(t)\| \to 0$ si $t \to 0$. Que peut-on dire si les matrices X et Y commutent ?

5°.b) Si U et V sont les matrices engendrant $\mathbb{A}$ (cf question 3°), exprimer $P_t(U,V) - t(U+V)$. Si P, Q et H sont les matrices engendrant $\mathbb{H}$ (cf. question 4°), calculer $P_t(P,Q)$, $P_t(P,H)$, $P_t(Q,H)$.

Partie II

6°. <u>Les espaces vectoriels quotients</u> :

6°.a) Soit E un k-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace. On considère la relation d'équivalence définie sur E par $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x - y \in F$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible** avec l'addition et l'opération externe. En déduire que le quotient de E par cette relation d'équivalence, noté E/F, est muni d'une structure d'espace vectoriel tel que la projection canonique $\pi : E \to E/F$ soit linéaire.

* de l'ensemble de cette question est peu clair

** Relation compatible : définition à donner.

6°.b) Si A est une algèbre associative, on dit qu'un sous-espace vectoriel I est un idéal bilatère si, pour $x \in I$ et $a \in A$, ax et xa sont dans** A. Pour $x_1, ..., x_k$ dans A, on appelle idéal engendré par $(x_1, ..., x_k)$ et on note $I(x_1, ..., x_k)$ l'espace*** des sommes du type $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i b_i$ pour a_i et b_i dans A. Montrer que $I(x_1, ..., x_k)$ est un idéal bilatère. Montrer que, pour tout idéal bilatère I, l'espace quotient A/I peut être muni d'une structure d'algèbre telle que la projection canonique $\pi : A \to A/I$ soit un homomorphisme d'algèbre.

7° On note par J l'ensemble des suites (σ_n) à valeurs dans {0,1,2} pour lesquelles il existe un entier $p_\sigma \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sigma_n = 0 \qquad \text{pour tout } n \geq p_\sigma$$
$$\sigma_n = 1 \text{ ou } 2 \qquad \text{pour tout n tel que } 0 \leq n < p_\sigma$$

Si σ et $\sigma' \in J$, leur produit $\sigma\sigma'$ est par définition l'élément de J défini par :

$$(\sigma\sigma')_n = \sigma_n \qquad \text{si } 0 \leq n < p_\sigma$$
$$= \sigma'_{n-p_\sigma} \qquad \text{si } p_\sigma \leq n$$

On désigne par $T(\mathbb{A})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admettant une base $(f_\sigma)_{\sigma \in J}$ indexée par J (on admettra son existence).

7°.a) Montrer qu'il existe un produit unique $(x,y) \to x.y$ sur $T(\mathbb{A})$ tel que :

(i) muni de ce produit, l'espace vectoriel $T(\mathbb{A})$ soit une algèbre unitaire,

(ii) $f_\sigma . f_{\sigma'} = f_{\sigma\sigma'}$ pour tout couple $(\sigma\sigma')$ d'éléments de J.

Soient ξ et η les éléments de J définis par :

$$\xi_0 = 1, \eta_0 = 2, \xi_n = \eta_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On pose $X = f_\xi$ et $Y = f_\eta$.

Soit $\mathbb{1}$ l'élément unité de $T(\mathbb{A})$, on pose $X^\circ = Y^\circ = \mathbb{1}$ et on désigne, pour tout $k > 0$, par X^k le produit de k éléments égaux à X, et par Y^k le produit de k éléments égaux à Y.

Montrer que tout élément f_σ peut s'écrire sous la forme $f_\sigma = X^{r_1} Y^{s_1} X^{r_2} Y^{s_2} ... X^{r_k} Y^{s_k}$ où les r_i et les s_i sont pour $1 \leq i \leq k$ des entiers ≥ 0.

7°.b) Soit I l'idéal bilatère engendré par XY - YX - Y. On notera $U(\mathbb{A})$ le quotient $T(\mathbb{A})/I$ et π la projection canonique $\pi : T(\mathbb{A}) \to U(\mathbb{A})$. On posera $x = \pi(X)$ et $y = \pi(Y)$. Montrer que dans $U(\mathbb{A})$ on a $y^p x = xy^p - py^p$ et $yx^n = (x-1)^n y$ quels que soient p, q, n dans $\mathbb{N}$. En déduire que les termes de la forme $x^p y^q$ $(p \geq 0, q \geq 0)$ constituent un système de générateurs de l'espace vectoriel $U(\mathbb{A})$. Montrer que ce système est libre.

7°.c) Soit J le sous-espace vectoriel $U(\mathbb{A})$ de base $x^p y^q$ $(p \geq 0, q > 0)$. Montrer que J est un idéal bilatère et que l'algèbre quotient $U(\mathbb{A})/J$ s'identifie à l'algèbre des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{R}$. Peut-on faire la même opération avec le sous-espace vectoriel J' de base $x^p y^q$ $(p > 0, q \geq 0)$?

7°.d) Si $\mathbb{A}$ est l'espace défini en 3°, trouver une application linéaire $f : \mathbb{A} \to U(\mathbb{A})$ telle que, pour tout A et $B \in \mathbb{A}$, on ait $f([A,B]) = f(A)f(B) - f(B)f(A)$.

8° On réalise avec l'espace $\mathbb{H}$ de la question 4° une construction analogue à celle de la question 7°. Soit K l'ensemble des suites (σ_n) à valeurs dans {0,1,2,3} pour lesquelles il existe un entier $p_\sigma \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sigma_n = 0 \text{ pour tout } n \geq p_\sigma$$
$$\sigma_n = 1, 2 \text{ ou } 3 \text{ pour tout n tel que } 0 \leq n < p_\sigma$$

* adjectif inutile

Tournez la page S.V.P.

** lire "I" au lieu de "A"

*** lire "espace engendré par les sommes"

**** préciser "non nulle"

ENS LYON (MI) M1

Pour σ et σ' dans K, on définit leur produit $\sigma\sigma'$ comme dans la question précédente.

On note $T(\mathbb{H})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admettant une base $(f_\sigma)_{\sigma\in K}$ indexée par K (on admettra l'existence de cet espace).

8°.a) Montrer qu'il existe un produit unique $(x,y) \to x.y$ sur $T(\mathbb{H})$ tel que :

(i) muni de ce produit, l'espace vectoriel $T(\mathbb{H})$ soit une algèbre unitaire.

(ii) $f_\sigma . f_{\sigma'} = f_{\sigma\sigma'}$ pour tout couple $(\sigma\sigma')$ d'éléments de K.

Soient ξ, η et ζ les éléments de K définis par $\xi_0 = 1$, $\eta_0 = 2$, $\zeta_0 = 3$, $\xi_n = \eta_n = \zeta_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Soit $\mathbb{1}$ l'élément unité de $T(\mathbb{H})$. On pose $X = f_\xi$, $Y = f_\eta$ et $Z = f_\zeta$. On pose $X^\circ = Y^\circ = Z^\circ = \mathbb{1}$; et, pour tout $k > 0$, on désigne par X^k (resp Y^k, resp Z^k) le produit de k éléments égaux à X (resp Y, resp Z). Montrer que tout élément f_σ peut s'écrire sous la forme $f_\sigma = X^{r_1} Y^{s_1} Z^{t_1} X^{r_2} \ldots X^{r_k} Y^{s_k} Z^{t_k}$ où les r_i, s_i et t_i sont pour $1 \leq i \leq k$ des entiers ≥ 0.

8°.b) Soit $I \subset T(\mathbb{H})$ l'idéal bilatère engendré par les éléments XY - YX - Z, XZ - ZX, YZ - ZY. On note $U(\mathbb{H})$ le quotient $T(\mathbb{H})/I$ et π la projection canonique $T(\mathbb{H}) \to U(\mathbb{H})$.

On pose $x = \pi(X)$, $y = \pi(Y)$, $z = \pi(Z)$. Montrer que dans $U(\mathbb{H})$ on a $x^p z^q = z^q x^p$, $y^p z^q = z^q y^p$ pour tous les entiers p et q. Montrer la relation $x^n y = yx^n + nx^{n-1}z$ et une relation analogue pour $y^n x$ et xy^n. En déduire que les $x^p y^q z^r$ pour $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ forment un système générateur de l'espace vectoriel $U(\mathbb{H})$. Montrer que ce système est libre.

8°.c) Montrer que le sous-espace I de base $x^p y^q z^r$ pour $r > 0$ est un idéal bilatère. Identifier l'algèbre quotient $U(\mathbb{H})/I$.

8°.d) Si $\mathbb{H}$ est l'espace défini en 4°, construire une application linéaire* $g : \mathbb{H} \to U(\mathbb{H})$ telle que $g([A,B]) = g(A)g(B) - g(B)g(A)$ pour tous les A et B dans $\mathbb{H}$.

9°. <u>L'algèbre des opérateurs différentiels</u> :

Soit $\mathfrak{E}$ l'espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in \mathfrak{E}$, on considère ses dérivées successives f', f'', ... $f^{(p)}$ (on convient que $f^{(0)} = f$). Pour p et q entiers naturels, on note $x^p d^q$ l'élément de $L(\mathfrak{E})$ qui, à $f \in \mathfrak{E}$, associe la fonction g donnée par $g(x) = x^p f^{(q)}(x)$. Montrer que l'espace vectoriel W engendré par les $x^p d^q$ est une sous-algèbre de $L(\mathfrak{E})$. Calculer xod - dox. Trouver un idéal bilatère K de $U(\mathbb{H})$ tel que l'on ait un isomorphisme d'algèbres entre W et $U(\mathbb{H})/K$. Expliciter cet isomorphisme.

10° On considère l'application** $\varphi : \mathbb{R}[x,y] \to U(\mathbb{A})$ définie par :

$$\varphi(x^p y^q) = \frac{x^p y^q + y^q x^p}{2} .$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour f et g polynômes dans $\mathbb{R}[x,y]$, on pose $f * g = \varphi^{-1}(\varphi(f)\varphi(g))$. Démontrer que la loi * est une loi associative, unitaire et non commutative sur l'espace des polynômes.

Montrer que Degré (f * g - fg) < Degré (f) + Degré (g) (on considère ici le degré total des polynômes : Degré $(x^p y^q) = p + q$). Donner des formules pour $x^p * y^q$ et $y^q * x^p$.

11° Définir une multiplication analogue sur l'espace des polynômes à trois indéterminées en utilisant $U(\mathbb{H})$ (on définira au préalable l'algèbre des polynômes à trois indéterminées en s'inspirant de la question 1°.a). Etudier ses propriétés.

* préciser : " non nulle "

** préciser : " linéaire "